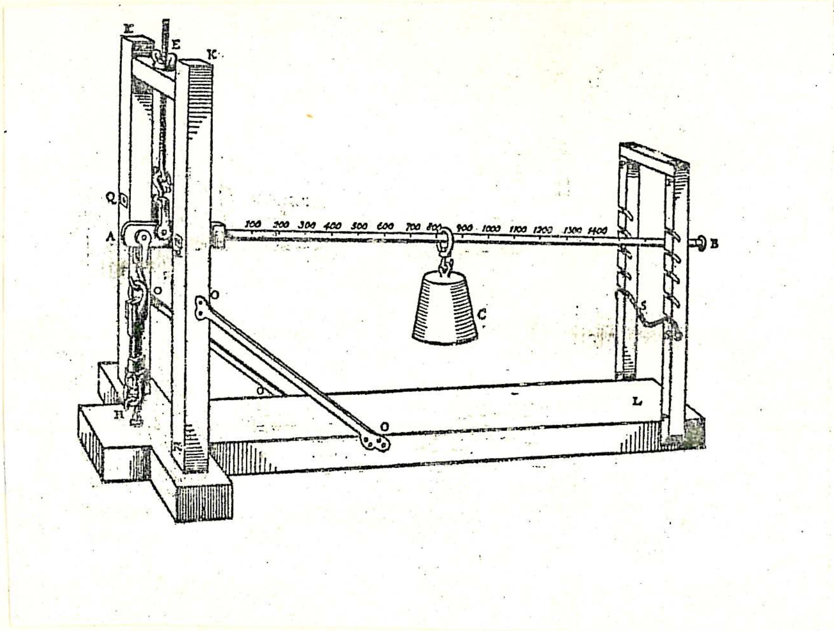
Notat vedr.: Spændings- og tøjningsbegrebet

Heshe, Gert

Publication date:
1975

Document Version
Tidlig version også kaldet pre-print

Trækprøvemaskine fra 1729.



Notat vedrørende

SPÆNDINGS- OG TØJNINGSBEGREBET

Gert Heshe

Juli 1975

Indhold:

6. SPÆNDINGS- OG TØJNINGSBEGREBET.

6.1. Spændingsbegrebet.

Vi skal i dette kursus kun beskæftige os med faststof-mekanikken, idet langt den overvejende del af vore bygningskonstruktionselementer er faste legemer.
Mellem et fast legemes (en konstruktionsdels) molekyler virker der stærke sammenhængskræfter. Hvis dette ikke var tilfældet ville molekylerne ikke kunne holdes på deres plads, og legemet ville falde sammen som støv.

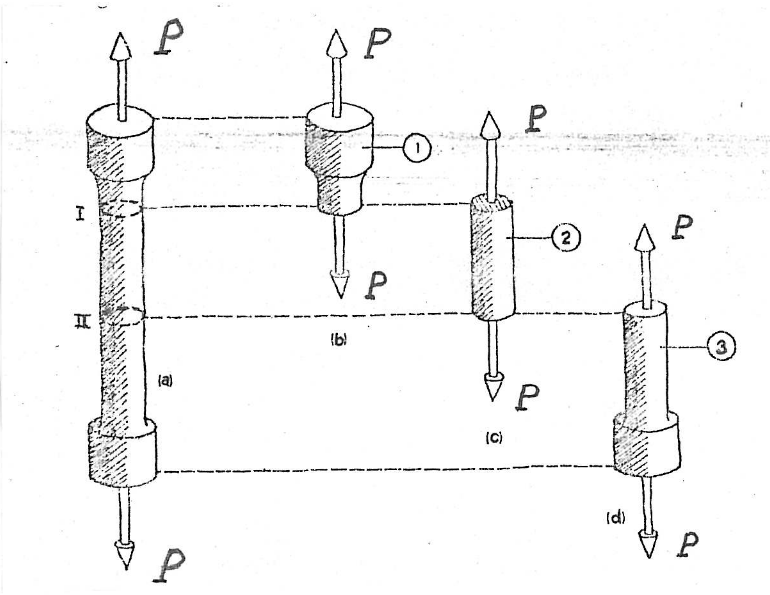


fig. 1. Trækstang med ydre og indre kræfter.

På grund af disse sammenhængskræfter kan man f.eks. belaste en stålstang centralt i begge ender med en enkeltkraft P , uden at der tilsyneladende sker andet, end at stålstangen forlænger sig. Vi skal dog senere se, at der også sker andre ting.

Betragter vi fig. la, fremgår det, at det er en stang, der i begge ender påvirkes af en centralt virkende kraft P. Hvis de to kræfter er lige store, vil stangen være i ligevægt, d.v.s. stangen vil ikke flytte sig under kraftpåvirkningen. Der er ved denne betragtning set bort fra stangens egenvægt. I virkeligheden skal kraften ved stangens øverste ende være en lille smule større, nemlig kraften svarende til stangens egenvægt, end kraften ved stangens nederste ende.

Men hvad sker der inde i stangen ?
For at forklare dette, vil vi repetere Newtons 3. lov, der siger:

Modvirkningen er lig virkningen og går i modsat retning af denne, eller, de kræfter, hvormed to legemer virker på hinanden, er bestandig lige store og går i modsatte retninger. Newtons 3. lov kaldes også ofte loven om aktion og reaktion. Loven kan anskueliggøres ved nedenstående eksempler:

Når et legeme trykker på eller trækker i et andet legeme, vil det andet legeme trykke på eller trække i det første legeme med en lige så stor kraft. Trykker man på en sten med en finger, så vil stenen trykke igen på fingeren med en lige så stor kraft.
Trækker en hest en sten af sted ved et tov, så trækker stenen lige så meget i hesten, som hesten trækker i stenen. D.v.s. Newtons 3. lov gælder uanset om systemet er i hvile eller i bevægelse.

Vi indlægger nu 2 tænkte vilkårligt placerede snit I og II, i stangen, se fig. 1.
Hvis det var virkelige snit, ville stangdelene 2 og 3 falde ned. Heraf fremgår, at hvis alle 3 stangdele skal blive på deres oprindelige pladser, må der i snittene I og II virke kræfter mellem de enkelte stangdele. Ved snit I må der på stangdel 1 virke kraften P nedad, for at stangdel 1 kan være i ligevægt. Denne kraft kan kun komme fra stangdel 2. Når stangdel 2 påvirker stangdel 1 med en nedadrettet kraft P, så må, ifølge Newtons 3. lov, stangdel 1 påvirke stangdel 2 med en opadrettet kraft P. Anvendes et lignende ræsonnement på snit II ses, at alle 3 stangdele må være påvirket i enderne af modsat rettede kræfter P, som vist i fig. 1. Kræfterne i snittene I og II vil vi her betegne indre kræfter.

Da de to snit I og II var vilkårligt placerede, fremgår det af ovenstående, at ligegyldigt hvor i stangen mellem endefladerne, vi tænker os indlagt et snit, så må de 2 snitflader, hvis der stadig skal være ligevægt, være påvirket af modsat rettede kræfter P.

Mange har i begyndelsen svært ved rigtig at forstå dette, at kraften i et snit både virker opad og nedad. Kræfterne virker på hver sin snitflade som indre kræfter, og sådanne forekommer altid parvis og modsat rettede.

Nu vil stangtværsnittene jo ikke "føle" at de, som vist i fig. 1, påvirkes af en enkeltkraft midt i tværsnittet. Stangtværsnittene vil nærmere "føle" at de blev påvirket af et stort antal "små kræfter" jævnt fordelt over hele tværsnittet se fig. 2. Summen af disse "små kræfter" skal være lig kraften P, og de "små kræfters" resultant skal have samme angrebspunkt som P.

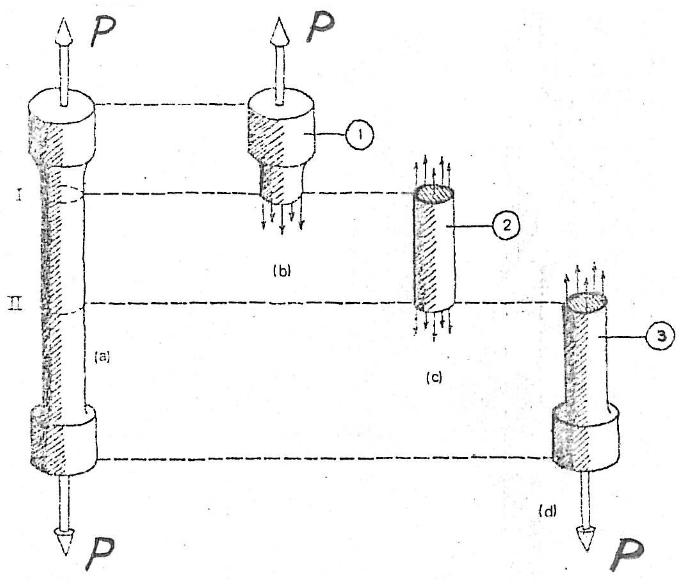


fig.2. Stang med ydre kræfter og indre spændinger.

I nærheden af enderne, hvor den ydre kraft P skal overføres til stangen, vil de "små kræfter" ikke være jævnt fordelt over tværsnittet. Det kan imidlertid vises (Saint Venants princip), at i en afstand , i stangens længderetning, af 1 á 2 gange stangens tværdimension fra stedet, hvor den ydre kraft angriber, vil de "små kræfter" være jævnt fordelt.

At de "små kræfter" fordeler sig jævnt kan anskueliggøres på flg. måde:

Tænkes stangen i fig. 1 opbygget af et stort antal elastiktråde, med tværsnit som en "alm. elastik", lagt løst ved siden af hinanden, vil der, hvis kraften P angriber i hver sin ende af en enkelt af elastiktrådene, blot ske det, at den enkelte tråd forlænges på grund af kraftpåvirkningen. Alle de andre tråde, vil bevare deres oprindelige længde, da de jo ikke, på grund af at trådene er placeret løst ved siden af hinanden, vil blive påvirket af nogen kraft.

Tænkes alle trådene nu limet sammen langs deres overflader, er det intuitivt klart, at hvis ovenstående forsøg gentages, vil alle trådene forlænge sig lige meget. Eller næsten lige meget, må vi nok sige, for den tråd, vi trækker i, vil på grund af før omtalte randvirkning forlænge sig en anelse mere end de øvrige tråde.

Da alle trådene forlænges, er det ensbetydende med, at de alle bliver påvirket af en kraft. I en afstand af ca. 2 gange den sammensatte stangs tværmål fra P's angrebspunkt vil der være samme kraft i de enkelte elastiktråde, og kraften P vil derfor være jævnt fordelt over stangens tværsnit.

De "små kræfter" benævnes spændinger, idet disse er defineret som en kraft pr. arealenhed. Spændingen i det ovenfor omtalte tilfælde beregnes som

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

hvor P er kraften, og A er stangens tværsnitsareal.

Spændingen betegnes med det græske bogstav σ (sigma).

Påvirkes stangen af trækkræfter som vist i fig.1, kaldes de spændinger, der opstår i stangens indre, for trækspændinger. Påvirkes stangen af kræfter rettet modsat de i fig. 1 angivne, kaldes de optrædende spændinger, trykspændinger.

Normalt regnes trækspændinger positive.
Træk- og trykspændinger benævnes under ét normalspændinger, idet de står vinkelret på snitfladen.

I faste legemer kan der også optræde spændinger, der er parallelle med den snitflade de virker på. Disse spændinger kaldes forskydningsspændinger, og betegnes ofte med det græske bogstav τ (Tau). I fig. 3 er forskydningsspændingerne anskueliggjort. De viste spændinger vil, hvis $\tau \cdot dF$ summeres over hele tværsnittet, have en resultant, hvis størrelse er lig P.
$\tau \cdot dF$ er kraften på arealelementet dF.

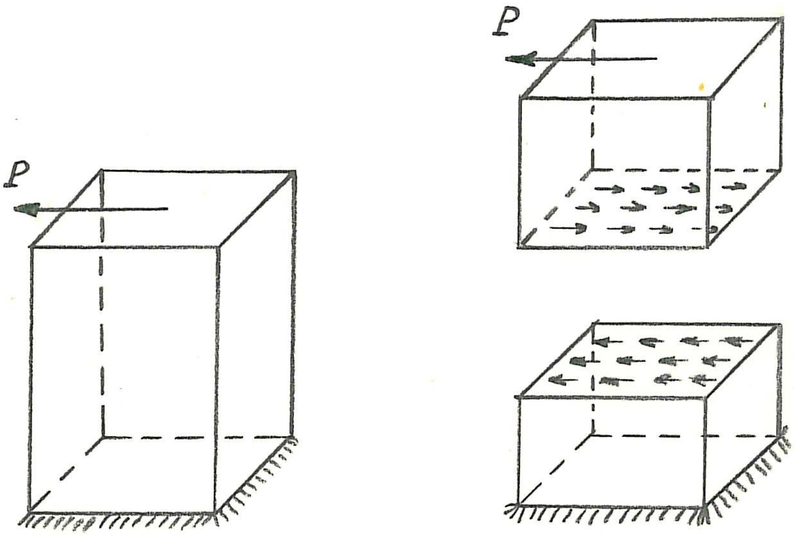
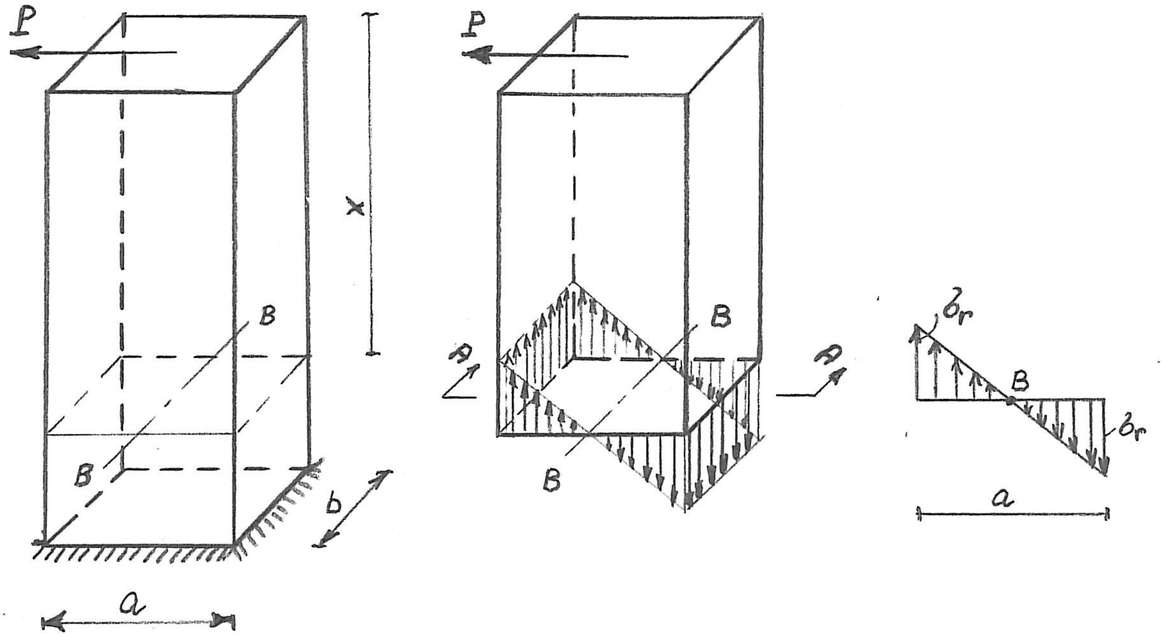


fig.3. Ydre kraft og indre forskydningsspændinger.

De i fig. 3 viste spændinger i det tænkte snit er ikke de eneste spændinger, der optræder. Der vil også være normalspændinger. Disse vil dog ikke være jævnt fordelt, som ved den ovenfor betragtede trækstang. Der vil være trækspændinger til højre og trykspændinger til venstre i tværsnittet, og disse vil være fordelt som angivet i fig. 4. Dette vil blive vist senere i kurset.



a. b. c. snit A-A

fig.4. Ydre kraft og indre normalspændinger (forskydningsspændinger er ikke vist).

Hvad betyder så denne spændingsfordeling ?
Ja, lad os først se, hvad projektionen på lodret af de "små kræfter" giver.

$$P_L = \tfrac{1}{2}a \cdot b \cdot \tfrac{1}{2}\sigma_r \div \tfrac{1}{2}a \cdot b \cdot \tfrac{1}{2}\sigma_r = 0$$

Altså ingen resulterende kraft $\perp$ på snitfladen.

Tages moment omkring linien B (se fig. 4c) fås

$$M_{B,i} = \tfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\tfrac{1}{2}\sigma_r\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}+\tfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\sigma_r\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{6}b\cdot a^2\cdot\sigma_{br}$$

Af fig. 4a ses, at den ydre krafts moment om linie B-B bliver $M_{B,y} = P\cdot x$.

Hvis der tænkes lagt et snit, som vist punkteret i fig. 4a, vil snitfladen indeholde linien B-B.
Snitfladen hørende til den øverste del vil ifølge Newtons 3. lov være påvirket af et moment, der er lige så stort men modsat rettet det moment $M_{B,i}$, der påvirker snitfladen hørende til den nedre del.

Da den øvre del skal være i ligevægt må

$$M_{B,y} = M_{B,i}$$

$$P\cdot x = \frac{1}{6}b\cdot a^2\cdot\sigma_{br}$$

heraf kan spændingen beregnes til

$$\sigma_r = \frac{P\cdot x}{\frac{1}{6}\cdot b\cdot a^2}$$

Spændinger, svarende til ovenstående spændingsfordeling, benævnes ofte bøjningspændinger.
I de flest forekommende konstruktioner vil der i virkelige snit optræde både normal- og forskydningsspændinger. Snitfladen vil ikke "føle" det, som om den er påvirket af normalspændinger af en given størrelse og forskydningsspændinger af en given størrelse, men som om den er påvirket af en spænding, hvis størrelse og retning er lig ovennævnte normal- og forskydningsspændingers resultant.

6.2 Tøjningsbegrebet.

Belaster man en i loftet ophængt 1 m lang gummistang og stålstang, hver med et tværsnitsareal på 1 cm^2, med et 10 kg vægtlod, vil man bemærke, at medens gummistangen forlænger sig, sker der tilsyneladende ikke noget med stålstangen. Men det er kun tilsyneladende for alle kendte materialer vil forlænge sig - mere eller mindre under påvirkning af en trækkraft.

Benytter vi et fintfølende måleapparatur, vil vi, hvis vi belaster ovennævnte stålstang med en kraft på 5 kN ~ 500 kp måle en forlængelse på $\Delta l_1 = 0{,}243$ mm. Udskifter man den 1 m lange stang med en 2 m lang stang og belaster med sammme kraft vil man finde en forlængelse $\Delta l_2 =$ 0,486 mm $= 2 \cdot \Delta l_1$. Udføres ovennævnte forsøg med samme belastninger på stålstænger med samme tværsnit men forskellige længder, vil man finde, at den relative længdeændring $\frac{\Delta l}{l}$ vil være konstant nemlig

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}243}{1000} = 2{,}43 \cdot 10^{-4} = 0{,}243 \text{ o/oo}$$

I styrkelæren kaldes den relative længdeændring tøjningen og betegnes med det græske bogstav ε (epsilon).

Belaster man ovennævnte 1 m lange stålstang med 10 kN ~ 1000 kp vil man finde en tøjning på $\varepsilon = 4{,}86 \cdot 10^{-4}$, d.v.s. en fordobling af kraften vil give anledning til en fordobling af tøjningen. Udføres der forsøg med forskellige belastninger vil man se, at der inden for visse grænser, er proportionalitet mellem belastningerne, (og dermed spændinger idet $\sigma = \frac{P}{A}$), og tøjningerne.

Dette udnyttes meget i styrkelæren. Vi skal senere i kurset se hvordan.

Det bemærkes, at de nævnte tøjninger er meget små. Så små at man måske kunne fristes til at se bort fra dem. Men det kan man ikke i styrkelæren. Det vil senere i kurset blive klart, at en ændring i tøjningen i en stålstang fra $\varepsilon = 0$ til $\varepsilon = 0{,}002$ vil forårsage ting i stålstangen, som vi ikke kan tillade os at se bort fra.

De ovenfor betragtede tøjninger kaldes ofte normaltøjninger eller længdetøjninger. De regnes positive, når det drejer sig om forlængelser og negative, når det drejer sig om forkortelser.

De ovenfor betragtede deformationer er forlængelser ellers forkortelser. I fig. 10 vises en anden art deformationer. Indtegnes på den ubelastede og dermed udeformerede skive et rektangel A, B, C og D, vil dette rektangel ved deformationen blive omdannet til et parallellogram. A_1, B_1, C_1 og D_1. D.v.s. der vil ved deformationen opstå vinkelændringer φ mellem de forskellige retninger i skiven.

Ved denne deformation vil de før omtalte deformationer, forlængelser og forkortelser, også opstå, idet, som det fremgår af figuren, diagonalen BD vil forlænges og diagonalen AC vil forkortes.

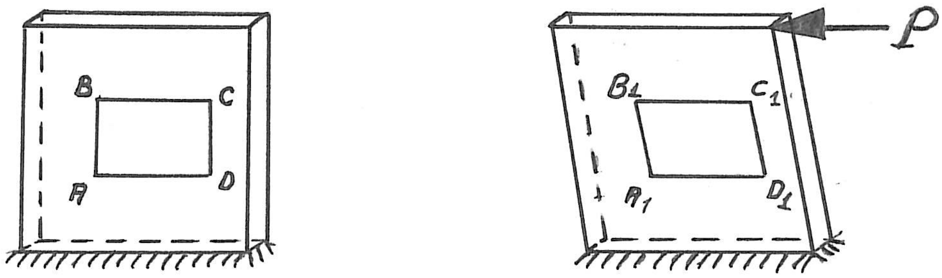


fig. 10. Deformationer ved forskydningspåvirkninger.

6.3. Spændings- tøjningsrelationer.

Det blev i afsnit 6.2 nævnt, at man for et materiale ved belastninger inden for visse grænser vil finde, at hvis man fordobler belastningen og dermed spændingen, vil man iagttage, at forlængelsen og dermed tøjningen fordobles.

Anvender man de samme belastninger på et andet materiale, vil man, hvis det er elastisk (se senere), finde lignende forhold. Blot har tøjningerne her en anden størrelse.

D.v.s. at der tilsyneladende er en materialeafhængig sammenhæng mellem spændinger og tøjninger.

Tøjninger ved enaksede spændingstilstande.

Det simpleste forsøg, man kan udføre, for at få et indtryk af en sådan sammenhæng, er et såkaldt trækforsøg. Hermed menes, at man forsøger at påføre et prøvelegeme spændingstilstanden enakset træk. Prøvelegemet til et trækforsøg behøver ikke nødvendigvis at være skiveformet, det er i reglen en ret cylinder og oftest med cirkulært eller kvadratisk tværsnit. Har vi i frembringerretningen en x-akse, forstås ved spændingstilstanden enakset træk i en sådan cylinder, en spændingstilstand, hvor der i ethvert snit $\perp$ x-aksen kun er en normalspænding og i ethvert punkt af snittet den samme spænding. Endvidere kræves, at i ethvert snit $\neq$ x-aksen skal spændingen være nul. Man kan med tilnærmelse påføre det cylindriske prøvelegeme enakset træk ved for enderne at påføre to lige store men modsat rettede kræfter P, se fig. 11, hvormed naturligvis menes, at der for enderne virker to kraftsystemer, der hver for sig er statisk ækvivalente med en kraft P virkende i en linie $\neq$ frembringerretningen. I et materialprøvningslaboratorium påføres kræfterne gerne ved forskydningskræfter langs overfladen i nærhed

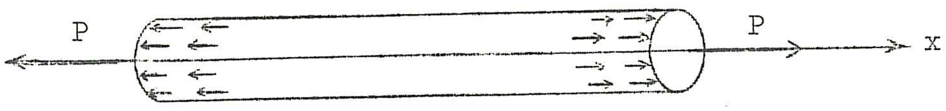


Fig. 11.

den af enderne, idet prøvelegemet spændes fast i prøvemaskinens kæber. Det er klart, at spændingstilstanden i nærheden af enderne på ingen måde er enakset træk. Det kan imidlertid vises både ad eksperimentel og teoretisk vej, at et stykke borte fra enderne (nogle få gange tværdimensionen af prøvelegemet) er spændingstilstanden enakset træk, hvis kraftsystemerne for enderne er ækvivalente med kræfter, der virker i en linie gennem normalsnittenes tyngdepunkter, tyngdepunktslinien. Er dette ikke tilfældet, vil normalspændingen ikke være jævnt fordelt over ethvert normalsnit.

Strengt taget kan spændingsfordelingen ikke beregnes uden kendskab til spændings-tøjningsrelationerne, dog kan man i ovennævnte simple tilfælde vise, at spændingstilstanden er enakset uanset hvilken sammenhæng, der er mellem spændinger og tøjninger, når blot prøvelegemet er homogent og isotropt, se nedenfor.

Når et prøvelegeme af den omtalte art, en trækstang, påvirkes af de omtalte kræfter P, vil prøvelegemet forlænge sig, og man kan da måle sammenhørende værdier af prøvelegemets forlængelse Δl og kraften P. Har prøvelegemet oprindeligt længden l er den relative forlængelse af prøvelegemet

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{6}$$

Er prøvelegemet homogent og isotropt, se nedenfor, viser det sig, at alle linieelementer på cylinderens overflade undergår den samme relative forlængelse, bortset fra enderne af prøvelegemet. Udtrykket (6) giver da den relative forlængelse i ethvert punkt i kraftretningen.

Er kraften P bliver normalspændingen σ i ethvert normalsnit

$$\sigma = \frac{P}{F} \tag{7}$$

hvor F er arealet af et normalsnit.
Trækforsøget udføres nu ved, at man lader P vokse og måler de tilsvarende værdier af ε. Udføres forsøg med trækstænger med forskelligt tværsnit, men af samme materiale, finder man, at der til samme spænding σ svarer samme tøjning ε* m.a.o. gøres tværsnittet n gange så stort kræves n gange så stor kraft for at frembringe samme tøjning. For samme materiale finder man altså en entydig sammenhæng mellem σ og ε ved trækforsøget.
Ved et materiales trækarbejdslinie forstås det grafiske billede af funktionen $\sigma = f(\varepsilon)$, d.v.s. normalspændingen σ som funktion af den relative forlængelse, tøjningen, ε. Trækarbejdslinier kan antage mange forskellige former afhængigt af materialet.
En trækarbejdslinie er lineær, hvis der er proportionalitet mellem σ og ε, blød, hvis arbejdslinien er nedad hul og hård, hvis den er opad hul, se fig. 12. Som eksempel på et materiale med blød arbejdslinie, nævnes beton. En lineær arbejds-

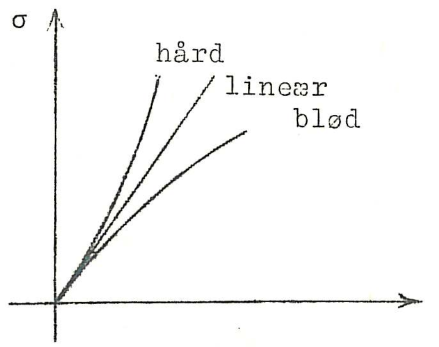


Fig. 12

linie har f.eks. stål for tilstrækkeligt små spændinger.
En lineær trækarbejdslinie kan skrives

$$\sigma = E\varepsilon \tag{8}$$

hvor proportionalitetsfaktoren kaldes elasticitetskoefficienten for træk eller Young's modulus. Denne relation kaldes Hooke's

---
* d.v.s. n gange så stor længde giver n gange så stor forlængelse Δl for samme kraft og tværsnit.

lov efter Robert Hooke (1678). For bløde og hårde trækarbejds-linier kaldes

$$E_\sigma = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \qquad (9)$$

tangenthældningen og

$$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \qquad (10)$$

sekanthældningen

Tangenthældningen E_0 for $\sigma = \varepsilon = 0$, betegnes ofte begyndelses-elasticitetskoefficienten.

En trækarbejdslinie er elastisk, hvis arbejdslinien er den samme for såvel belastning, d.v.s. for P voksende, som for aflastning, d.v.s. for P aftagende. Arbejdslinien kan godt være elastisk, selvom den er krum (det er den f.eks. for gummi i et stort tøjningsområde). Er arbejdslinien lineær og elastisk siges den at være lineærelastisk. En elastisk trækarbejdslinie giver altså en

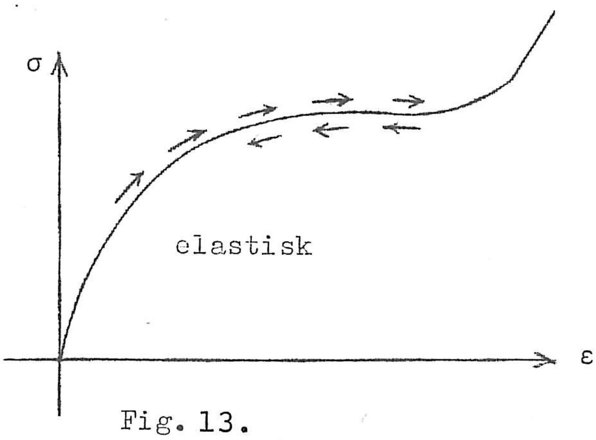


Fig. 13.

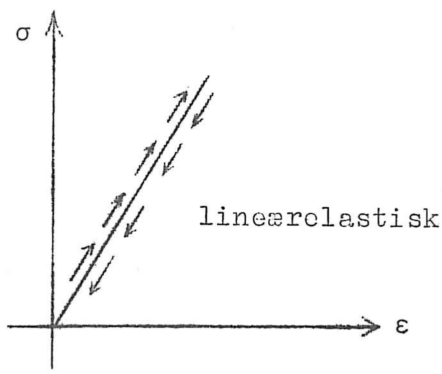


Fig. 14.

entydig sammenhæng med σ og ε. Kun få materialer med krum arbejdslinie har elastisk arbejdslinie. Aflastningsgrenen, se fig. 15. er oftest forskellig fra belastningsgrenen, således at når spændingen nul nås efter belastning og påfølgende aflastning måles en såkaldt blivende relativ forlængelse også kaldet en plastisk forlængelse.

En lineær arbejdslinie kan i praksis altid regnes lineærelastisk d.v.s. de plastiske forlængelser kan regnes til nul.

De fleste materialer har en arbejdslinie, der er elastisk inden for visse spændingsgrænser. Den største spænding man kan påføre i det elastiske område kaldes elasticitetsgrænsen.

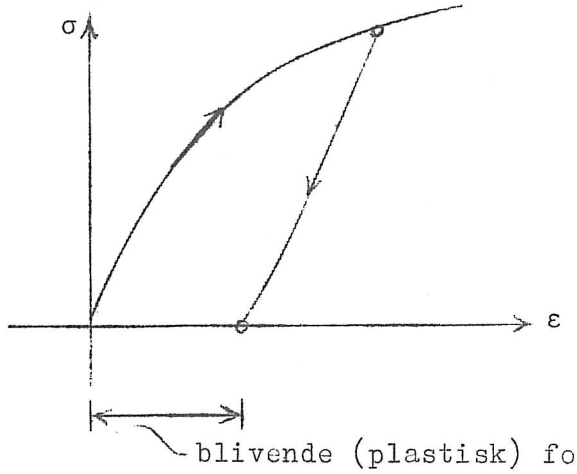


Fig. 15.

De fleste materialer har endvidere en arbejdslinie, der er lineærelastisk inden for visse spændingsgrænser. Den største spænding man kan påføre i det lineærelastiske område kaldes proportionalitetsgrænsen, der ikke behøver at være sammenfaldende med elasticitetsgrænsen.
En trækarbejdslinie er idealplastisk, hvis den ender med en gren $\neq$ ε-aksen, se fig. 16. og udviser plastiske forlængelser ved aflastning fra tøjninger svarende til den vandrette gren.

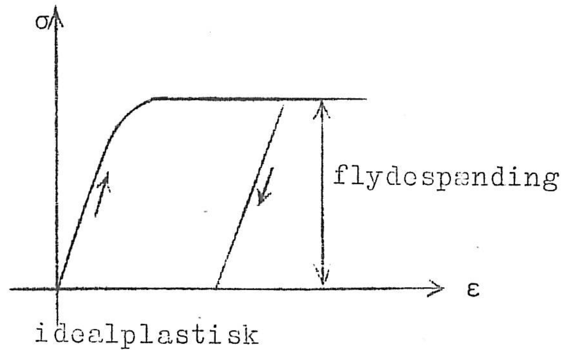


Fig. 16.

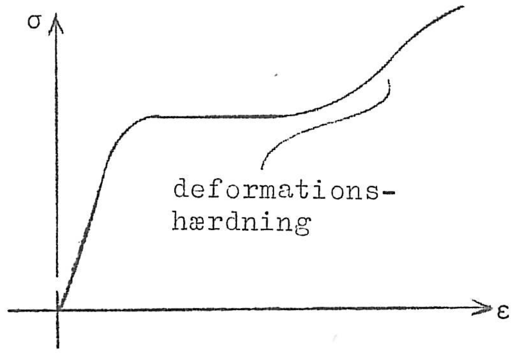
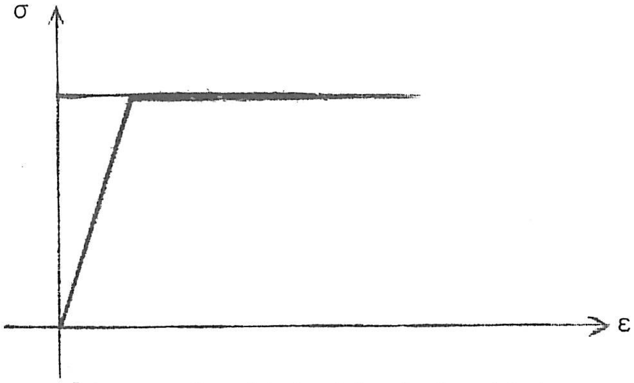


Fig. 17.

Når σ er konstant for voksende tøjning siges materialet at flyde og spændingen ved flydning betegnes flydespændingen. Er trækarbejdslinien lineærelastisk indtil flydningen begynder siges arbejdslinien at være lineærelastisk-idealplastisk, se fig. 18. Blødt ståls arbejdslinie har omtrent dette udseende i et vist tøjningsområde.
Stiger spændingen ved flydning d.v.s. efter at ~~trækstangen er~~ deformeret plastisk siges arbejdslinien at udvise deformationshærdning, se fig. 17. Falder arbejdslinien efter at have passeret et maksimum



lineærelastisk-idealplastisk

Fig. 18.

tales om deformationssvækkelse, som man finder hos beton, se fig.19. Endelig skal nævnes, at en idealplastisk arbejds-

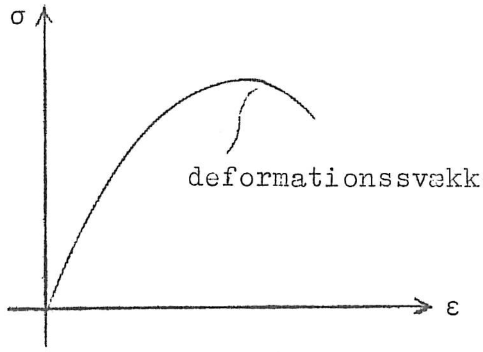
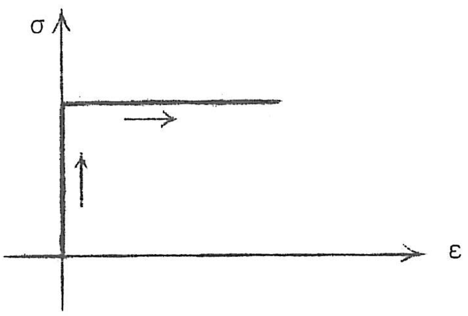


Fig. 19.

linie ofte vil udvise så store plastiske deformationer, at de elastiske deformationer vil være små i forhold til de plastiske. I sådanne tilfælde kan man approksimere arbejdslinien med den i fig.20. viste arbejdslinie, der betegnes stiv-idealplastisk eller blot stiv-plastisk. Når denne tilnærmelse benyttes regnes



stiv-plastisk

Fig. 20.

altså kun med plastiske deformationer, mens de elastiske regnes til nul.

Man kan i stedet for enakset træk naturligvis også operere med enakset tryk. Et sådant forsøg udføres gerne ved, at der påføres trykkræfter for enderne af et cylindrisk prøvelegeme.

Trykarbejdslinier kan have samme udseende som trækarbejdslinier og der benyttes samme terminologi som ved trækarbejdslinier.

Ved tilstrækkeligt store tøjninger sker brud i materialet. Tøjningen ved brud kaldes brudtøjningen og den dertil svarende spænding kaldes brudspændingen.